PRO DIFFERENCIATION

Ниатшин Булат, гр. 475

15.12.2014

Нано-Дифференциатор

Производить, или не производить? В нефти вопрос

Наш широкий и необъятный мир представлен целой серией разнообразных и совершенно противоположных по своей природе зависимостей. И умение в этих зависимостях выделять части, разбивать, исследовать их - неоднократно помогало всему человечеству. И поэтому можно смело утверждать, что в некоторых случаях дифференцирование по праву считается полноценным образом жизни.

Основные применяемые правила:

1) Производная суммы: $f = g + h \Rightarrow f' = g' + h'$

2) Производная произведения: $f = g \cdot h \Rightarrow f' = g' \cdot h + g \cdot h'$

3) Производная частного: $f = \frac{g}{h} \Rightarrow f' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$

4) Производная сложной функции $f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

5) Производная синуса: $sin'(x) = cos(x)$

6) Производная косинуса $cos'(x) = -sin(x)$

7) Производная экспоненты $(e^x)' = e^x$

8) Производная логарифма $ln'(x) = \frac{1}{x}$

Производная следующей функции по x:

$$f(x, y, z) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) + e^{x^3 \cdot y}$$

На этом тривиальном примере наглядно покажем практическую реализацию правил дифференцирования

Взятие производной по х

Продифференцируем нашу функцию по х. Будем пользоваться стандартными правилами.

Прибавляй и умножай, и голландцев побеждай

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) + e^{x^3 \cdot y} \Rightarrow f'_x = (\sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x))'_x + (e^{x^3 \cdot y})'_x$

Экспонента $f(x) = e^{x^3 \cdot y} \Rightarrow f'_x = e^{x^3 \cdot y} \cdot (x^3 \cdot y)'_x$

Умножая свои добрые деяния, светлую сторону приближаешь ты

$f(x) = x^3 \cdot y \Rightarrow f'_x(x) = (x^3)'_x(x) \cdot (y) + (x^3) \cdot (y)'_x)$

Простепенись! $x^3 \Rightarrow f'_x = (x^3)'_x$

Производная суммы настолько сложна, насколько наполнены смыслом песни Стаса Михайлова

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) \Rightarrow f'_x = (\sin(x^x + y) \cdot y)'_x + (z^7 \cdot ln(z + x))'_x$

Свет на стороне умножения. Ты в правильном направлении!

$f(x) = z^7 \cdot ln(z + x) \Rightarrow f'_x(x) = (z^7)'_x(x) \cdot (ln(z + x)) + (z^7) \cdot (ln(z + x))'_x)$

Степень - штука полезная, ее производная - тем более $z^7 \Rightarrow f'_x = (z^7)'_x$

Логарифмируй и побеждай!

$f(x) = ln(z + x) \Rightarrow f'_x(x) = \dfrac{1}{(z + x)} \cdot (z + x)'_x$

$f(x) = z + x \Rightarrow f'_x = (z)'_x + (x)'_x$

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y \Rightarrow f'_x(x) = (\sin(x^x + y))'_x(x) \cdot (y) + (\sin(x^x + y)) \cdot (y)'_x)$

На темную сторону силы поглядывать стал? Аккуратнее

$f(x) = \sin(x^x + y) \Rightarrow f'_x = cos(x^x + y) \cdot (x^x + y)'$

$f(x) = x^x + y \Rightarrow f'_x = (x^x)'_x + (y)'_x$

Экспоненциальность существования... Да, она такая, суровая и неожиданная

$x^x \Rightarrow f'_x = (e^{x \cdot ln(x)})'_x$

Экспонента $f(x) = e^{x \cdot ln(x)} \Rightarrow f'_x = e^{x \cdot ln(x)} \cdot (x \cdot ln(x))'_x$

$f(x) = x \cdot ln(x) \Rightarrow f'_x(x) = (x)'_x(x) \cdot (ln(x)) + (x) \cdot (ln(x))'_x)$

ЛОГАРИФМ МЫ БРАТЬ НЕ БРОСИМ, 1488!!!

$f(x) = ln(x) \Rightarrow f'_x(x) = \dfrac{1}{x} \cdot (x)'_x$

Результат по x

В итоге имеем:

$f'(x) = \cos(x^x + y) \cdot e^{x \cdot ln(x)} \cdot (ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot y + z^7 \cdot \frac{1}{(z+x)} + e^{x^3 \cdot y} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y$

Производная следующей функции по y:

$$f(x, y, z) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) + e^{x^3 \cdot y}$$

На этом тривиальном примере наглядно покажем практическую реализацию правил дифференцирования

Взятие производной по y

Продифференцируем нашу функцию по y. Будем пользоваться стандартными правилами.

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) + e^{x^3 \cdot y} \Rightarrow f'_y = (\sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x))'_y + (e^{x^3 \cdot y})'_y$

Экспонента $f(x) = e^{x^3 \cdot y} \Rightarrow f'_y = e^{x^3 \cdot y} \cdot (x^3 \cdot y)'_y$

$f(x) = x^3 \cdot y \Rightarrow f'_y(x) = (x^3)'_y(x) \cdot (y) + (x^3) \cdot (y)'_y)$ $x^3 \Rightarrow f'_y = (x^3)'_y$

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) \Rightarrow f'_y = (\sin(x^x + y) \cdot y)'_y + (z^7 \cdot ln(z + x))'_y$

$f(x) = z^7 \cdot ln(z + x) \Rightarrow f'_y(x) = (z^7)'_y(x) \cdot (ln(z + x)) + (z^7) \cdot (ln(z + x))'_y)$ $z^7 \Rightarrow f'_y = (z^7)'_y$

$f(x) = ln(z + x) \Rightarrow f'_y(x) = \frac{1}{(z+x)} \cdot (z + x)'_y$

$f(x) = z + x \Rightarrow f'_y = (z)'_y + (x)'_y$

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y \Rightarrow f'_y(x) = (\sin(x^x + y))'_y(x) \cdot (y) + (\sin(x^x + y)) \cdot (y)'_y)$

Темная сторона овладевает тобой, Люк! Борись с Темным Лордом!

$f(x) = \sin(x^x + y) \Rightarrow f'_y = cos(x^x + y) \cdot (x^x + y)'$

$f(x) = x^x + y \Rightarrow f'_y = (x^x)'_y + (y)'_y$

В любой непонятной ситуации бери экспоненту

$x^x \Rightarrow f'_y = (e^{x \cdot ln(x)})'_y$

Экспонента $f(x) = e^{x \cdot ln(x)} \Rightarrow f'_y = e^{x \cdot ln(x)} \cdot (x \cdot ln(x))'_y$

$f(x) = x \cdot ln(x) \Rightarrow f'_y(x) = (x)'_y(x) \cdot (ln(x)) + (x) \cdot (ln(x))'_y)$

$f(x) = ln(x) \Rightarrow f'_y(x) = \frac{1}{x} \cdot (x)'_y$

Результат по y

В итоге имеем:

$f'(y) = \cos(x^x + y) \cdot y + \sin(x^x + y) + e^{x^3 \cdot y} \cdot x^3$

Производная следующей функции по z:

$$f(x, y, z) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) + e^{x^3 \cdot y}$$

На этом тривиальном примере наглядно покажем практическую реализацию правил дифференцирования

Взятие производной по z

Продифференцируем нашу функцию по z. Будем пользоваться стандартными правилами.

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) + e^{x^3 \cdot y} \Rightarrow f'_z = (\sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x))'_z + (e^{x^3 \cdot y})'_z$

Экспонента $f(x) = e^{x^3 \cdot y} \Rightarrow f'_z = e^{x^3 \cdot y} \cdot (x^3 \cdot y)'_z$

$f(x) = x^3 \cdot y \Rightarrow f'_z(x) = (x^3)'_z(x) \cdot (y) + (x^3) \cdot (y)'_z)\ x^3 \Rightarrow f'_z = (x^3)'_z$

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y + z^7 \cdot ln(z + x) \Rightarrow f'_z = (\sin(x^x + y) \cdot y)'_z + (z^7 \cdot ln(z + x))'_z$

$f(x) = z^7 \cdot ln(z + x) \Rightarrow f'_z(x) = (z^7)'_z(x) \cdot (ln(z + x)) + (z^7) \cdot (ln(z + x))'_z)\ z^7 \Rightarrow f'_z = (z^7)'_z$

$f(x) = ln(z + x) \Rightarrow f'_z(x) = \dfrac{1}{(z + x)} \cdot (z + x)'_z$

$f(x) = z + x \Rightarrow f'_z = (z)'_z + (x)'_z$

$f(x) = \sin(x^x + y) \cdot y \Rightarrow f'_z(x) = (\sin(x^x + y))'_z(x) \cdot (y) + (\sin(x^x + y)) \cdot (y)'_z)$

$f(x) = \sin(x^x + y) \Rightarrow f'_z = cos(x^x + y) \cdot (x^x + y)'$

$f(x) = x^x + y \Rightarrow f'_z = (x^x)'_z + (y)'_z$

$x^x \Rightarrow f'_z = (e^{x \cdot ln(x)})'_z$

Экспонента $f(x) = e^{x \cdot ln(x)} \Rightarrow f'_z = e^{x \cdot ln(x)} \cdot (x \cdot ln(x))'_z$

$f(x) = x \cdot ln(x) \Rightarrow f'_z(x) = (x)'_z(x) \cdot (ln(x)) + (x) \cdot (ln(x))'_z)$

$f(x) = ln(x) \Rightarrow f'_z(x) = \dfrac{1}{x} \cdot (x)'_z$

Результат по z

В итоге имеем:

$f'(z) = 7 \cdot z^{6} \cdot ln(z + x) + z^{7} \cdot \frac{1}{(z + x)}$

Финальная стадия - полная производная:

Полная производная есть квадратный корень из суммы всех квадратов частных производных. Найдем ее

$$F'(x, y, z) =$$
$$\sqrt{(\cos(x^{x} + y) \cdot e^{x \cdot ln(x)} \cdot (ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot y + z^{7} \cdot \frac{1}{(z + x)} + e^{x^{3} \cdot y} \cdot 3 \cdot x^{2} \cdot y)^{2} + (\cos(x^{x} + y) \cdot y + \sin(x^{x} + y) + e^{x^{3}}}$$

Использованная литература

1) Больное воображение автора программы

2) Г.Е. Иванов - Математический анализ, ч.1